Sujet

Exercice 1

1. Soit a un réel différent de 1. Montrer que pour tout entier n non nul :
$$\frac{a^n - 1}{a - 1} = \sum_{i=0}^{n-1} a^i.$$
2. Soient a, b deux réels, avec $a \neq b$. Montrer que pour tout entier n non nul :
$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = \sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1-i}.$$

Exercice 2

Soit $\mathcal{A} = \{(,)\}$ un alphabet. On définie $D_{\mathcal{A}}$ le langage des mots bien parenthésés sur $\mathcal{A}$ par induction de la façon suivante :
— $\mathcal{E} \in D_{\mathcal{A}}$
— Pour tout mot u et v de $D_{\mathcal{A}}$, $u.v \in D_{\mathcal{A}}$
— Pour tout mot u de $D_{\mathcal{A}}$, $(u) \in D_{\mathcal{A}}$

1. Les mots suivants sont-ils des mots de $D_{\mathcal{A}}$:
— $(())()$
— $(()()$
— $((()))$
Seule une justification informelle est attendue.
2. Montrer que pour tout mot v de $D_{\mathcal{A}}$, $|v|_(= |v|_($ où $|v|_)$ (resp. $|v|_)$) désigne le nombre de ")" (resp. de "(") dans v.
3. $D_{\mathcal{A}}$ est-il rationnel ? Justifier.

Exercice 3

Soit $A = \{a, b\}$ un alphabet. Soit $\preccurlyeq$ une relation définie sur A^* par : pour tout mots u et v de A^*, $u \preccurlyeq v$ si et seulement si ils existent deux mots w_0, w_1 tels que $u = w_0 v w_1$. Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre.

Exercice 4 Soit $\mathcal{A} = \{a, b\}$ un alphabet. Soit A l'automate suivant :

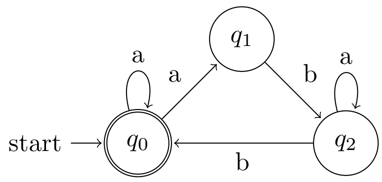

FIGURE 4 – Automate A

1. L'automate A est-il déterministe ? complet ?
2. Calculer $L(A)$.
3. Donner, en justifiant, un automate déterministe reconnaissant $L(A)$.
4. Donner un automate B reconnaissant les mots de $\mathcal{A}^*$ ayant un nombre impaire de a.
5. Construire, en justifiant, un automate reconnaissant $L(A) \cap L(B)$.

Exercice Bonus

Soit M une fonction booléenne à trois arguments telle que pour toute variables booléennes x, y, z, $M(x, y, z) = 1$ si et seulement si au plus une des trois variable vaut 1. Donner, en justifiant, une forme normale disjonctive et une forme normale disjonctive de M.

Simplifier ces formules le plus possible, de sorte à ce que dans chaque formule, chaque variables apparaissent au plus 2 fois. On rappellera pour cela que pour tout a, $a = a + a$.