Aide

Dans cette aide, vous trouver pour chaque exercice une aide à sa résolution. L'utilisation de ce document est facultative.

Toute élément de cette aide doit être recopié pour être utilisée.

Exercice 1 Voici une réponse possible à la question 1) dans laquelle certaines parties ont été remplacées par " ? ? ?". Reprenez-la en remplaçant les " ? ? ?" par ce qui conviendrait pour en faire une réponse correcte.

On veut montrer : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \frac{a^n-1}{a-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a^i$.

Posons pour tout entier n la propriété $P(n) :=$??? .
Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ par récurrence sur n.

Cas de base : Montrons $P(???)$
Montrons $\frac{a^{???}-1}{a-1} = \sum_{i=0}^{???-1} a^i$.
On a $\frac{a^{???}-1}{a-1} =???$
On a $\sum_{i=0}^{???-1} a^i =???$
Donc, on a bien ? ? ?.

Cas d'induction Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$
On a

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1-1} a^i &= \sum_{i=0}^{n-1} a^i + ??? \\ &= ??? + ??? \text{ par } P(n) \\ &= ??? \\ & ??? \\ &= \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \end{aligned}$$

D'où $P(n+1)$

Exercice 2

1.
2. Indice : Induction structurelle.
3. (a) Soit n un entier, expliquer brièvement pourquoi $(^n)^n$ est dans le langage.
   (b) Supposer qu'il existe un automate reconnaissant le langage, et arriver à une contradiction avec la question 2.

Exercice 3 : Preuve à trous

Voici une réponse possible à l'exercice dans laquelle certaines parties ont été remplacées par " ? ? ?". Reprenez-la en remplaçant les " ? ? ?" par ce qui conviendrait pour en faire une réponse correcte.

Montrons que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre. Pour cela, montrons que $\preccurlyeq$ est réflexive (1), transitive(2) et ? ? ? (3).

Preuve de (1) : Soit u un mot. Montrons $u \preccurlyeq u$, c'est-à-dire, montrons qu'ils existent deux mots w_0 et w_1 tels que $u = w_0 u w_1$. On a $u = \epsilon u \epsilon$, donc $w_0 =$??? et $w_1 =$??? conviennent.

Preuve de (2) : Soient u, v et w trois mots tels que $u \preccurlyeq v(*)$ et $v \preccurlyeq w(**)$, montrons $u \preccurlyeq w$, c'est-à-dire ? ? ?.
Par (*), on sait qu'ils existent deux mots w_0 et w_1 tels que ? ? ?.
Par (**), on sait qu'ils existent deux mots w'_0 et w'_1 tels que ? ? ?.

? ? ?

Preuve de (3) : ? ? ?

Exercice 4

1. Indice : Lisez la question 3.
2. Indice : lemme d'Arden.