Interrogation du 18 octobre 2023

Questions

1. Énoncer le principe d'induction bien-fondée.
2. Soit X un ensemble d'étiquettes, et AB l'ensemble des arbres binaires étiqueté par X. Dans la suite, on note h, la fonction donnant la hauteur d'un arbre, et n la fonction donnant le nombre de noeud d'un arbre. On définis l'ensemble des arbres binaires équilibrés ABE un sous ensemble de AB de la façon suivante :
   — $\emptyset$ est dans ABE
   — (x, g, d) est dans ABE pour tout $x \in X$ et g et d dans ABE, tels que $|h(g) - h(d)| \leq 1$.
   Montrer que pour tout arbres binaires bien équilibrés a, on a : $n(a) \leq 2^{h(a)} - 1$.
3. Soit A un alphabet. Soit $\to$ une relation sur $A^* \times A^*$ définie par : pour tout mot u et v sur A, $u \to v$ si et seulement si il existe deux mots w et w' et $a \in A$ tels que $u = waaw'$ et $v = ww'$. Soit $\to^*$ la clôture réflexive et transitive de $\to$. Montrer que $\to^*$ est un ordre.
4. Soit $M : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$M(n) = \begin{cases} n - 10 \text{ si } n > 100 \\ M(M(n+11)) \text{ sinon} \end{cases}$$

   Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, si $n \leq 100$ alors $M(100 - n) = 91$.