Interrogation du 11 octobre 2023

Question

1. Donner la définition d'un ordre bien fondé.
2. (a) Donner la définition de l'injectivité et la surjectivité.
   (b) Soit $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, $f((x, y)) = x + y$. La fonction f est-elle injective ? Est-elle surjective ? Justifier.
3. Soit $g : E \to F$ une fonction quelconque. On définie la relation R sur $E \times E$, de la façon suivante : pour tout x, y, xRy si et seulement si $f(x) = f(y)$.
   (a) Montrer que R est une relation d'équivalence.
   (b) (Bonus) A quelle condition sur g a-t-on $R = Id_E$?
4. Soit $|$ la relation "divise", définie sur $\mathbb{N}$ par : $a|b$ si et seulement si $\exists k \in \mathbb{N}, b = ak$.
   Rappelez les définitions et donner, si ils existent,
   — les éléments maximaux de $E = \{2, 3, 4 \cdots\}$.
   — la borne inférieure de $\{a, b\}$ pour a, b deux éléments de $\mathbb{N}$.
   — le maximum de $A = \{4, 6, 8, 24\}$
   Seule une justification informelle de quelques lignes est attendue.
5. Donner une définition inductive de $f(n) = a^{2^n}$, définie sur $\mathbb{N}$.
6. Soient A, B deux parties d'un ensemble quelconque E.
   (a) A-t-on $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$? Justifier.
   (b) A-t-on $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$? Justifier.
7. (Bonus) Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble défini inductivement par :
   — $Z \in \mathcal{N}$
   — $\forall N \in \mathcal{N}, S(N) \in \mathcal{N}$
   où Z est une constante quelconque et S une application quelconque.
   Soit $Add : \mathcal{N}^2 \to \mathcal{N}$ définie par
   — $\forall N \in \mathcal{N}, Add(N, Z) = N$.
   — $\forall N, M \in \mathcal{N}^2, Add(N, S(M)) = S(Add(N, M))$.
   Montrer que pour tout élément N et M de $\mathcal{N}$, $Add(N, M) = Add(M, N)$.