

Correction

Exercice 1

1. A partir de l'automate A , on établit les équations suivantes :

$$L_0 = aL_0 + bL_1 + \mathcal{E}$$

$$L_1 = aL_1 + bL_2$$

$$L_2 = aL_2 + bL_0$$

et on sait que $L(A) = L_0$ est solution de ce système. Par application du lemme d'Arden sur les 3 équations, possible car $\{a\}$ ne contient pas le mot vide, on obtient :

$$L_0 = a^*(bL_1 + \mathcal{E})$$

$$L_1 = a^*bL_2$$

$$L_2 = a^*bL_0$$

D'où, en remplaçant, on obtient

$$L_0 = a^*(b(a^*b(a^*bL_0) + \mathcal{E}) + \mathcal{E}) = a^*ba^*ba^*bL_0 + a^*$$

De même, on applique le lemme d'Arden, et on a :

$$L(A) = L_0 = (a^*ba^*ba^*b)^*a^*$$

- 2.

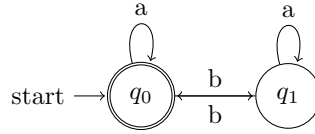


FIGURE 2 – Automate B

3. Posons $A = (S_A, T_A, I_A, F_A)$ et $B = (S_B, T_B, I_B, F_B)$. Soit $C = (S, T, I, F)$ l'automate défini comme suit

$$S = S_A \times S_B$$

$$T = \{(s_A, s_B)x(s'_A, s'_B), (s_Axs'_A) \in T_A, (s_Bxs'_B) \in T_B\}$$

$$I = I_A \times I_B$$

$$F = F_A \times S_B \cup F_B \times S_A$$

D'après le cours, cette construction est valide car A et B sont complets et $L(C) = L(A) \cup L(B)$. L'automate C est aussi déterministe car A et B le sont. Posons maintenant $C' = (S, T, I, F')$ avec $F' = F_A \times F_B$. De même, on a $L(C') = L(A) \cap L(B)$ et C' déterministe.

Finalement, posons $C'' = (S, T, I, F'')$ avec $F'' = F \setminus F'$ et montrons que $L(C') = L(A) \uplus L(B)$.

$L(C'') \subseteq L(A) \uplus L(B)$:

Soit u est un mot de $L(C'')$. Il existe alors une exécution d'étiquette u dans C'' dont le dernier état est dans F'' .

Or les automates C , C' et C'' ont les mêmes ensembles d'états et de transitions, cette exécution est aussi une exécution d'étiquette u dans C et C' .

Or $F'' \subseteq F$, donc c'est une exécution acceptante dans C et donc $u \in L(C)$.

De plus, $F' \cap F'' = \emptyset$ donc cette exécution n'est pas acceptante dans C' .

Or, par déterminisme, c'est l'unique exécution d'étiquette u dans C' . Donc il n'existe pas d'exécution acceptante d'étiquette u dans C' , ie u n'est pas dans $L(C')$.

Donc $u \in L(C) \setminus L(C') = L(A) \cup L(B) \setminus (L(A) \cap L(B)) = L(A) \uplus L(B)$.

$L(A) \uplus L(B) \subseteq L(C'')$:

Soit u dans $L(A) \uplus L(B)$.

On a alors que u est dans $L(A) \cup L(B) = L(C)$.

Donc, u est l'étiquette d'une exécution dans C , dont le dernier état est un état f dans F .

De même que précédemment, cette exécution est aussi une exécution d'étiquette u dans C' et C'' .

Or, si f est aussi dans F' , alors u est dans $L(C') = L(A) \cap L(B)$, ce qui est impossible, donc f est dans $F \setminus F'$. Donc cette exécution d'étiquette u est acceptante dans C'' , et donc $u \in L(C'')$.

L'automate obtenu par cette construction est le suivant :

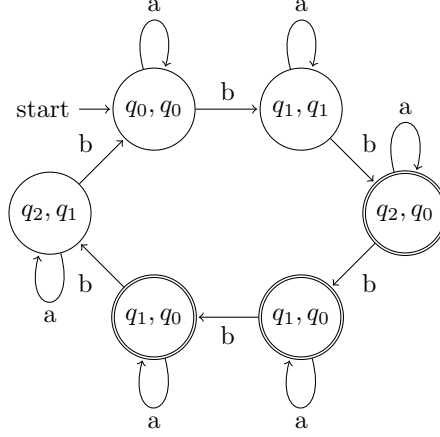


FIGURE 3 – Automate C''

Exercice 2

- Appelons construction 1 la construction par concaténation et construction 2 la construction par ajout de " (" et ") ". Les mots $((()))()$ et $((()))()$ sont constructibles à partir de $\mathcal{E}$:

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{E} \xrightarrow{1} () \xrightarrow{1} (()) \\ \mathcal{E} \xrightarrow{1} () \end{array} \right\} \xrightarrow{2} ((()))() \text{ et } \mathcal{E} \xrightarrow{1} () \xrightarrow{1} (()) \xrightarrow{1} ((())).$$

De plus, $|\mathcal{E}| = 0$ est pair et la seule construction ajoutant des lettres est la construction 2, ajoutant un nombre pair de lettres. Par induction immédiate, les mots de $D_{\mathcal{A}}$ sont tous de longueur paire, donc $((()))$ n'est pas un mot $D_{\mathcal{A}}$.

- Pour tout mot u de $D_{\mathcal{A}}$ posons

$$P(u) := \forall v \in \text{prefix}(u) : |v|_{\zeta} \geq |v|_{\eta}$$

.

Cas de base : On a $\text{prefix}(\mathcal{E}) = \{\mathcal{E}\}$. Par convention, $|\mathcal{E}|_{\zeta} = 0$ et $|\mathcal{E}|_{\eta} = 0$. D'où : $P(\epsilon)$.

Cas d'induction : Il y a 2 cas.

Cas construction par concaténation. Soit u et v deux mots de $D_{\mathcal{A}}$. Supposons $P(u)$ et $P(v)$ et montrons $P(u.v)$. Soit w un préfixe de uv .

Si $|w| \leq |u|$, alors w est aussi un préfixe de u et par $P(u)$:

$$|w|_{\zeta} \geq |w|_{\eta}$$

Sinon, il existe w' tel que $w = uw'$. Alors, w' est un préfixe de v et par $P(v)$ on a

$$|w'|_{\zeta} \geq |w'|_{\eta} \quad (1)$$

.

De plus, u est un préfixe de u , donc par $P(u)$, on a

$$|u|_{\zeta} \geq |u|_{\eta} \quad (2)$$