Exercice 1 (10 min)

Montrez par récurrence sur n que

$$\forall n \geq 1 : \frac{n}{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)}$$

Exercice 2 (10 min)

Soit R une relation binaire sur $\mathbb{R}$ définie par xRy si et seulement si $\parallel x - y \parallel \leq 2$ où $\parallel x \parallel$ désigne la valeur absolue de x.

1. R est-elle réflexive ?
2. R est-elle transitive ?
3. R est-elle symétrique ?
4. R est-elle antisymétrique ?
5. R est-elle une relation d'équivalence ?
6. R est elle déterministe ?

Bonus

Soit A un alphabet non vide. Pour toute lettre a de A on introduit une nouvelle lettre $\overline{a}$. On note $\mathcal{A}$ l'alphabet $\{a, a \in A\} \cup \{\overline{a}, a \in A\}$ et on pose pour tout a dans A : $\overline{\overline{a}} = a$.

On définie la relation $\rightarrow$ sur $\mathcal{A}^*$ par

$$\forall u, v \in (\mathcal{A}^*)^2, u \rightarrow v \Longleftrightarrow \exists w_1, w_2 \in (\mathcal{A}^*)^2, \exists a \in \mathcal{A}, u = w_1 a \overline{a} w_2 \text{ et } v = w_1 w_2.$$

On dit que u se réduit à v (via a).

Un mot u est dit irréductible si et seulement si il n'existe pas de mot v tel que $u \rightarrow v$.

Notons $\rightarrow^*$ la fermeture réflexo-transitive de $\rightarrow$.

1. Trouver un mot u irréductible tel que $ab\overline{a}a\overline{b} \rightarrow^* u$ (en détaillant le calcul, notamment en indiquant pour chaque étape de réduction via quelle lettre cette étape est faite)
2. Montrez que pour tout mot u il existe un mot v irréductible tel que $u \rightarrow^* v$.
3. (*) Montrez que la relation R définie comme suit :

   $$\forall u, v \in \mathcal{A}^* uRv \text{ si et seulement si } \exists w \in \mathcal{A}^*, u \rightarrow^* w, v \rightarrow^* w, \text{ et } w \text{ irréductible.}$$

   est une relation d'équivalence.