

## Interro 2 : correction

### Exercice 1

Posons  $P(n)$  la propriété définie pour  $n \in \mathbb{N}$  par

$$P(n) := \left( \frac{n}{n+1} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} \right),$$

et montrons  $\forall n \geq 1 P(n)$  par récurrence sur  $n$ .

**Initialisation** Montrons  $P(1)$ .

On a  $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$  et  $\sum_{i=1}^1 \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$

D'où  $P(1)$ .

**Hérédité**

Soit  $n \geq 1$ . Supposons  $P(n)$  et montrons  $P(n+1)$ .

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} && (\text{par } P(n)) \\ &= \frac{n(n+2) + 1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n(n+1+1) + 1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n(n+1) + n + 1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n+1)(n+1)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

D'où  $P(n+1)$ .

On a donc montré que pour tout entier  $n \geq 1$  :  $\frac{n}{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)}$

### Exercice 2

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Montrons que  $xRx$ .  
On a  $\|x - x\| = 0 \leq 2$   
Donc  $xRx$  et donc  $R$  est réflexive.
2. On a  $0R2$  ( $\|0 - 2\| = 2$ ) et  $2R4$  ( $\|2 - 4\| = 2$ ).  
Or  $\|0 - 4\| = 4 > 2$ . Donc, on n'a pas  $0R4$  et donc  $R$  n'est pas transitive.
3. Soit  $x$  et  $y$  deux réels tels que  $xRy$ . Montrons que  $yRx$ .  
On a

$$\|x - y\| = \|(x - y)\| = \|y - x\|.$$

Donc  $\|x - y\| < 2 \Rightarrow \|y - x\| < 2 \Rightarrow yRx$

Donc  $R$  est symétrique

4. On a  $0R2$  et  $2R0$  mais pas  $0 = 2$ , donc  $R$  n'est pas antisymétrique.
5.  $R$  n'est pas une relation d'équivalence car elle n'est pas transitive.
6. On a  $0R2$  et  $0R1$  mais  $1 \neq 2$ . Donc  $R$  n'est pas déterministe.