Questions

1. Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E. Montrez que si $A \cap B = A \cap C$ alors $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$.
2. Soit E un ensemble quelconque muni de la relation R. Montrez que si $R \cap R^{-1} \subseteq Id_E$ alors R est antisymétrique.
3. Soit $f : A \to B$ une fonction, avec A et B deux ensembles quelconques. Montrez que f est injective si et seulement si pour tout sous ensembles X et Y de A : $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.
4. Soit $R \subseteq \mathbb{N}^2$ une relation telle que $(a,b)R(c,d)$ si et seulement si $a + b < c + d$. Montrer que $R \cup Id_{\mathbb{N}^2}$ est une relation d'ordre.
5. Soit $|$ la relation "divise", définie sur $\mathbb{N}$ par : $a|b$ si et seulement si $\exists k \in \mathbb{N}, b = ak$.
   Rappelez les définitions et donner, si ils existent,
   — les éléments minimaux de $E = \{2, 3, 4 \cdots\}$.
   — la borne supérieure de $\{a, b\}$ pour a, b deux éléments de $\mathbb{N}$.
   Seule une justification informelle de quelques lignes est attendue.
6. Donner la définition d'un ordre bien fondé.
7. Donner une autre caractérisation d'un ordre bien fondée.

Bonus

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$.